

Exercices – Séquence n° 16 – CALCUL INTÉGRAL

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a; b]$, comme aire sous la courbe représentative de f . Notation $\int_a^b f(x) dx$.
- Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a; b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a; b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .
- Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f . Notation $[F(x)]_a^b$.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Définition par les primitives de $\int_a^b f(x) dx$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b .
- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- Intégration par parties.

Capacités

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.
- Exemples d'algorithme : méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes ; méthode de Monte-carlo, algorithme de Brouncker pour le calcul de $\ln(2)$.

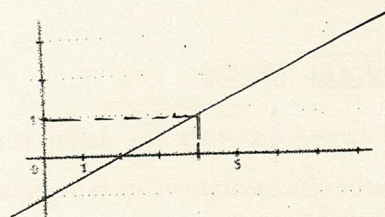
COMPÉTENCES :**Ch : CHERCHER****Mo : MODÉLISER****Re : REPRÉSENTER****Ra : RAISONNER****Ca : CALCULER****Co : COMMUNIQUER****Exercice 1 [Re-Ca]**

Dans le repère orthonormé ci-contre est graphiquement représentée une fonction f . A l'aide de ce graphique, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_2^6 f(x) dx$

2) $\int_4^7 f(x) dx$

3) $\int_0^2 f(x) dx$

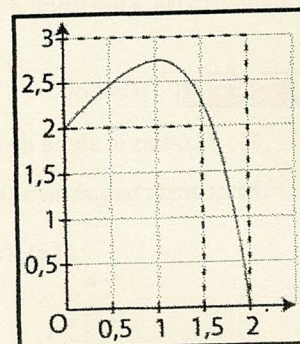
**Exercice 2 [Re-Ca]**

f est la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = (2 - x)e^x$.

Dans un repère orthogonal, voici la courbe représentative C_f de la fonction f .

On s'intéresse au nombre : $I = \int_0^2 f(x) dx$

- 1) Proposer un encadrement du nombre I par deux nombres entiers.
- 2) Déterminer le nombre I avec la calculatrice.



Exercice 3 [Ca-Co]

Étudier les variations de la fonction f définie sur $[-5; +\infty[$ par $f(x) = \int_{-5}^x (t^2 + 2t - 5) dt$

Exercice 4 [Ca]

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$ puis déterminer $\int_0^5 f(x) dx$.

Exercice 5 [Ca]

Calculer chaque intégrale à l'aide d'une primitive.

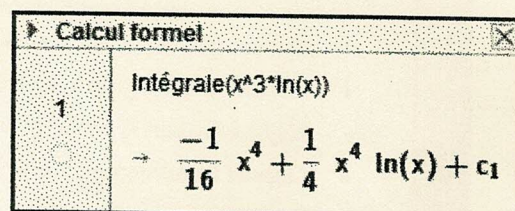
- 1) $\int_{-1}^4 (x^2 - 4x - 1) dx$ 2) $\int_{-2}^1 e^{5x-1} dx$ 3) $\int_{-2}^{-1} \frac{7}{x^2} dx$ 4) $\int_2^{49} \frac{3}{\sqrt{x}} dx$ 5) $\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx$
 6) $\int_0^{5\pi/6} (\sin(x) - \cos(2x)) dx$ 7) $\int_0^1 -\frac{4}{(x+2)^2} dx$ 8) $\int_{-1}^2 3x^2(5x^3 - 1)^2 dx$ 9) $\int_{e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$ 

Exercice 6 [Ca]

Voici un écran de calcul formel.

- Interpréter et vérifier le résultat affiché.
- Déterminer l'expression explicite de la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x t^3 \ln(t) dt$$

**Exercice 7** [Ca]

En probabilité, on définit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ de la façon suivante : si X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle alors, pour tous réels $a \geq 0$ et $b > 0$ tels que $a \leq b$, on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx$$

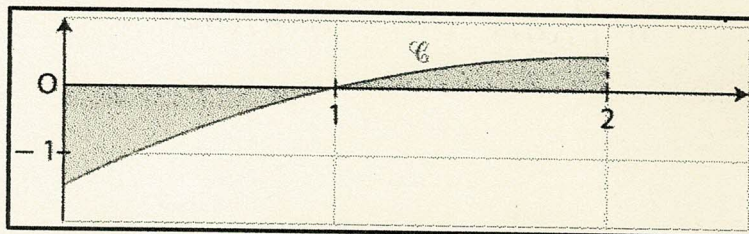
- Démontrer que $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ puis que $P(0 \leq X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$.
- La durée de vie (en mois) d'une montre connectée est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$. Quelle est la probabilité qu'une telle montre ait une durée de vie comprise entre 6 mois et 2 ans ?

Exercice 8 [Re-Ca]

Soit $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$ définie sur $[0; 2]$.

La courbe représentative C de la fonction f est tracée dans le repère ci-contre.

Calculer l'aire A , en unité d'aire, du domaine coloré.

**Exercice 9** [Ca-Co]

- Étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$.
- Dans chaque cas, en déduire le signe de l'intégrale.

a. $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$ b. $\int_{-1}^2 f(x) dx$ c. $\int_3^5 f(x) dx$

Exercice 10 [Ca]

f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[-1; 3]$ telles que $\int_{-1}^3 f(x) dx = 2$ et $\int_{-1}^3 g(x) dx = -2$.

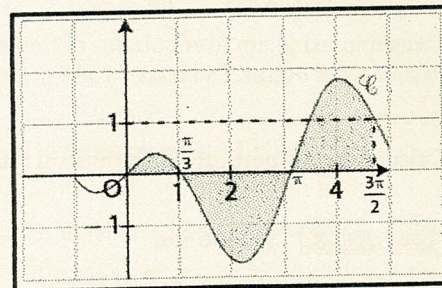
Déterminer $\int_{-1}^3 (3f(x) + 4g(x)) dx$.

Exercice 11 [Re-Ca]

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2 \cos(x) - 1) \sin(x)$

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine coloré sur le graphique.

**Exercice 12** [Ca-Ra-Re]

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 2$ et $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

- 1) Étudier, sur $\mathbb{R}$, le signe de $f(x) - g(x)$.
- 2) On se place dans un repère orthonormé. Déterminer, en unité d'aire, l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations :
 - a. $x = -2$ et $x = 1$
 - b. $x = 2$ et $x = 3$.

Exercice 13 [Ra-Ca-Co]

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2+x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

Exercice 14 [Ca]

Soit f une fonction dont le tableau de variations est donné ci-contre.

- 1) Donner le signe puis un encadrement de :

a. $\int_{-6}^1 f(t) dt$ b. $\int_3^5 f(t) dt$.

- 2) Peut-on connaître le signe de $\int_1^3 f(t) dt$?

x	-6	1	3	5
$f(x)$	4	7	-3	-1

Exercice 15 [Ra-Ca]

Comparer les intégrales I et J lorsque :

1) $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$ et $J = \int_0^1 e^{x^2+1} dx$

2) $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

Exercice 16 [Ra-Ca]

Déterminer un encadrement de $\int_0^3 \frac{10}{1+x^2} dx$ puis de $\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 17 [Ca-Ra]

On considère la fonction q , définie sur $]0; +\infty[$, par : $q(x) = x \ln(x)$.

- 1) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction Q définie sur $]0; +\infty[$ par : $Q(x) = ax^2 \ln(x) + bx^2$ soit une primitive de q sur $]0; +\infty[$.

- 2) En déduire une valeur exacte de $\int_1^4 q(x) dx$.

Exercice 18 [Ca]

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sur l'intervalle $I = [e^{-2}; e^{-1}]$

Exercice 19 [Ca]

Dans une usine, un four cuit des céramiques à température de 1000°C. On note t le temps, en heure, écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en °C) à l'instant t est donnée par la fonction f définie par :

$$f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20$$

Calculer la température moyenne du four sur les 15 premières heures de refroidissement.

Exercice 20 [Ca-Co-Ra]

Calculer chaque intégrale en intégrant par parties :

$$1) \int_0^{\pi} x \cos(x) dx \quad 2) \int_0^2 (3x+1)e^{-x} dx \quad 3) \int_1^e x^3 \ln(x) dx \quad 4) \int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^3} dx \quad 5) \int_{-1}^3 3x^3 e^{x^2} dx$$

Exercice 21 [Ca-Ra-Co]

f est la fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x}$.

1) Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$.

2) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

3) En intégrant par parties, calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 12x + 1) \ln(1-x) dx$.

Exercice 22 [Ca-Ra-Co]

Calculer les intégrales données à l'aide d'une double intégration par parties :

$$1) \int_0^1 x^2 e^x dx \quad 2) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos(x) dx \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$$

Exercice 23 [Ch-Ra-Ca-Co]

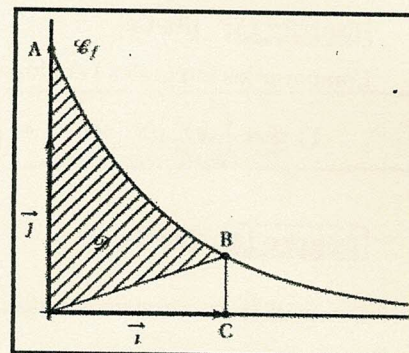
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = ke^{-kx}$ où k est un réel strictement positif.

On appelle C_f sa représentation graphique dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre.

On considère le point A de la courbe C_f d'abscisse 0 et le point B de la courbe C_f d'abscisse 1. Le point C a pour coordonnées $(1; 0)$.

D est le domaine délimité par l'axe des ordonnées, la courbe C_f et le segment $[OB]$.

Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine D vaut le double de celle du triangle OCB.



Exercice 24 [Ca-Ra-Ch-Co]

Une entreprise vend des voitures télécommandées. Les ventes mensuelles varient entre 1000 et 5000 voitures. Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1000 voitures. On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

- 1) Donner $r(1)$.
- 2) On **admet** que, pour tout $x \in [1; 5]$, la recette mensuelle est modélisée par $r(x) = 6 + x + 2 \ln(x)$. Étudier les variations de r sur l'intervalle $[1; 5]$.
- 3) Soit g la fonction définie, pour tout $x \in [1; 5]$, par $g(x) = 2 \ln(x)$.
 - a. En utilisant une intégration par parties, déterminer une primitive G de la fonction g sur $[1; 5]$.
 - b. En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle $[1; 5]$.
 - c. Déterminer l'arrondi à une dizaine d'euros près de la recette mensuelle moyenne lorsque l'entreprise vend entre 2000 et 4000 voitures télécommandées.

Exercice 25 [Ca-Ra-Co]

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

- 1) **Affirmation 1 :**

« Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$ »

- 2) **Affirmation 2 :**

« La suite (I_n) est décroissante »

- 3) **Affirmation 3 :**

« La suite (I_n) converge vers 0 »

Exercice 26 [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$.

- 1) Montrer que $I_0 = \ln 2$.
- 2) Calculer $I_0 - I_1$ puis en déduire la valeur de I_1 .
- 3) Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
- 4) Écrire, en langage Python, une fonction qui permet de déterminer, pour un entier naturel n saisi par l'utilisateur, la valeur de I_n .
- 5) Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Montrer que si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ puis que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$.
 - b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- 6) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
 - b. Déterminer alors la limite de la suite (S_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 27 [Ch-Ra-Ca-Co]

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f_n(x) = x^n e^x$.

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx.$$

Partie 1

- 1) a. On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $F_1(x) = (x - 1) e^x$. Vérifier que F_1 est une primitive de f_1 .
b. Calculer I_1 .

- 2) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$$

- 3) Calculer I_2 .

- 4) On considère la fonction « mystère » écrite en langage Python ci-contre :

A l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystère(5)`.

`from math import e # la constante d'Euler e`

```
def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i + 1)*a
        L.append(a)
    return L
```

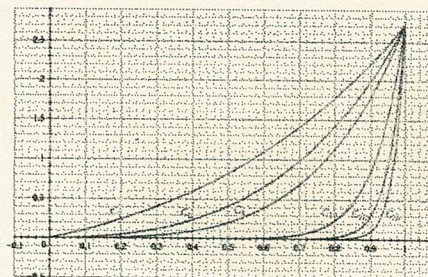
Partie 2

- 1) Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30} .
a. Donner une interprétation graphique de I_n .
b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

- 2) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

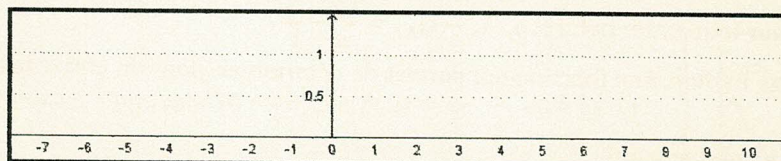
$$0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$$

- 3) En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

**Exercice 28** [Ca-Ra-Ch-Mo] L'intégrale de GAUSS**Partie A : Étude d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

- 1) Démontrer que la fonction f est paire. A quel intervalle I l'étude de f peut-elle donc être restreinte ?
- 2) Étudier les variations de f sur I et dresser le tableau de variations complet sur I .
- 3) A main levée, représenter f sur I dans le repère suivant puis expliquer comment obtenir sa courbe sur $\mathbb{R}$.

**Partie B : Estimation d'une aire**

Soit x un réel strictement positif.

- 4) A l'aide de la méthode des rectangles, écrire, en langage Python, une fonction qui prend en argument le réel x et le nombre n d'intervalles de la subdivision et qui renvoie un encadrement de $\int_0^x f(t) dt$.
- 5) Que renvoie cette fonction :
a. pour $x = 10$ et $n = 1000$?
b. pour $x = 100$ et $n = 10000$?
- 6) On **admet** que : $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x f(t) dt \right)$
a. Conjecturer la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$
b. Conjecturer alors la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ dite de GAUSS, résultat qu'on admettra.

Exercice 29 [Ca-Ra-Co]

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un tee-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x} \cos x$$

Partie A : Étude de la fonction f

- 1) Justifier que, pour tout réel x , $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$
- 2) En déduire la limite de f en $+\infty$.
- 3) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$
- 4) Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
 - a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
 - b. En déduire les variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

Partie B : Aire du logo

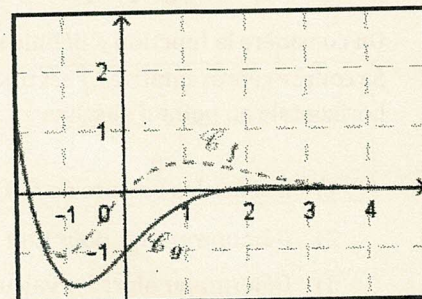
On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans le repère orthonormé du plan ci-contre d'unité graphique 2 cm.

- 5) Étudier la position relative des courbes C_f et C_g .
- 6) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x) e^{-x} dx = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}} \right)$$

- 7) On note D le domaine délimité par la courbe C_f , la courbe C_g et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

En déduire, en unité d'aire, l'aire du domaine D , puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 .

**Exercice 30** [Ra-Ca]

On pose : $I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1 + e^x)^2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx$.

- 1) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J .
- 2) Démontrer que, pour tout réel x , $\frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.
- 3) En déduire la valeur de J puis déterminer alors la valeur de I .

Exercice 31 [Ca-Ra-Ch-Co]

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx$$

- 1) Calculer I_0 .
- 2) a. Justifier que pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
 b. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
 c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

- 3) a. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx$$

- b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^\pi e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

- c. Dédurre des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .

- 4) a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nI_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}I_n$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 + n^2}$$

- 5) On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la 5^{ème} ligne du script Python suivant avec la commande appropriée.

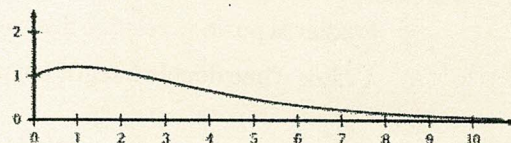
```
1 from math import *
2 def seuil():
3     n = 0
4     I = 2
5     ...
6     n = n + 1
7     I = (1 + exp(-n*pi)) / (n*n + 1)
8     return n
```

Exercice 32 [Ca-Ra-Ch-Co]

Partie A : Lectures graphiques

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{-\frac{1}{2}x}$ où a et b désignent deux réels.

Sa courbe représentative C_f est tracée ci-dessous ; elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.



- Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$.
- Démontrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}b + a\right)e^{-\frac{1}{2}x}$.
- Déterminer alors les valeurs de a et b .

Partie B : Étude d'une fonction

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x + 1)e^{-\frac{1}{2}x}$.

- Justifier que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = 2 \left(\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}} \right) + e^{-\frac{1}{2}x}$.
- En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$ et construire son tableau de variations.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0,07$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis en donner la valeur arrondie à l'unité.

Partie C : Modélisation d'un tas de sable

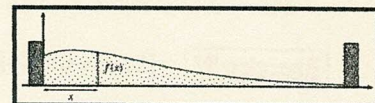
Dans cette partie, on considère que la courbe de la fonction f modélise le profil d'un tas de sable.

La longueur x et la hauteur $f(x)$ sont exprimées en mètres.

Ainsi, le fait que $f(0) = 1$ signifie qu'à son extrémité gauche, la hauteur du tas de sable est de 1 mètre.

On souhaite que le tas de sable soit limité par deux murs comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

Le mur de gauche coïncide avec l'axe des ordonnées et le mur de droite est placé de telle sorte que la hauteur de sable à cet endroit est de 7 cm.



- Pourquoi le mur de droite doit-il être placé à environ 10 mètres du mur de gauche ?
- Pour pouvoir créer un terrain de sport sur sable, on décide de niveler le tas de sable, c'est-à-dire de l'étaler à une même hauteur entre les deux murs.
Quelle sera la hauteur, arrondie au centimètre, du tas de sable une fois le nivellement réalisé ? Expliquer.

Exercice 33 [Ca-Ra-Ch-Co]**Partie A : étude de la fonction f**

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln(x)$.

- 1) a. Déterminer en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 b. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.
 c. Étudier le sens de variations de f sur $]0; +\infty[$.
 d. Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.
- 2) a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à $[1; 2]$.
 b. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)\alpha$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction f est définie sur $]0; 1]$ par $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln(x)$.

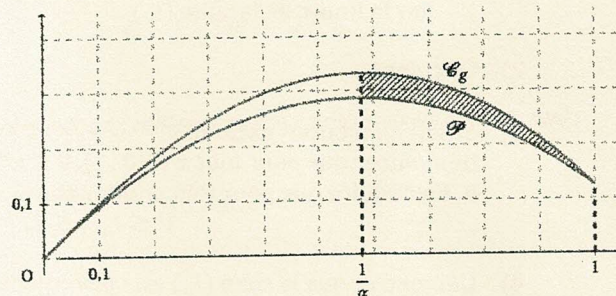
- 1) Montrer que g est dérivable sur $]0; 1]$ et que pour tout x de $]0; 1]$, $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
- 2) a. Justifier que pour tout x de $]0; \frac{1}{\alpha}]$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
 b. On admet le tableau de signes suivant :
 En déduire le tableau de variations de g sur $]0; 1]$.
 Les images et les limites ne sont pas demandées.

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1	
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0	-

Partie C : un calcul d'aire

On a représenté sur le graphique ci-contre :

- La courbe C_g de la fonction g ;
- La parabole P d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0; 1]$.



On souhaite calculer l'aire A du domaine hachuré entre les courbes C_g et P , et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)\alpha$.

- 1) a. Justifier la position relatives des courbes C_g et P sur l'intervalle $]0; 1]$.
 b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln(x) dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

- 2) En déduire l'expression, en fonction de α , de l'aire A .

Exercice 34 [Ch-Ra-Ca-Co] Bac Polynésie, juin 2025

On munit le plan d'un repère orthonormé. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $f_0(x) = e^{-x}$ et pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n e^{-x}$

Pour tout entier naturel n , on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonction f_n pour $n \geq 1$.

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

- 1) a. On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$. Montrer que pour tout $x \geq 0$,
 $f'_n(x) = (n - x)x^{n-1}e^{-x}$

b. Justifier tous les éléments du tableau ci-contre:

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	0

- 2) Justifier par le calcul que le point $A(1; e^{-1})$ appartient à courbe C_n .

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ pour $n \geq 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0; 1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

- 1) Sur le graphique ci-contre, on a représenté les courbes C_0, C_1, C_2, C_{10} et C_{100} .
 a. Donner une interprétation graphique de I_n .
 b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n)

- 2) Calculer I_0 .

- 3) a. Soit n un entier naturel.
 Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$
 b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

- 4) Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera L .

- 5) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

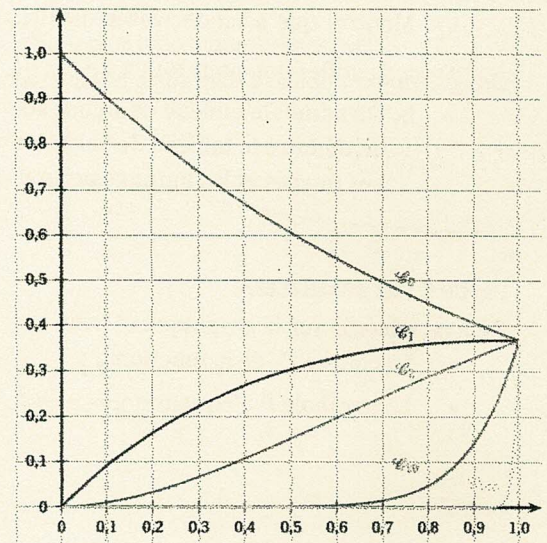
$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

- 6) a. Démontrer que si $l > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
 b. Démontrer que $l = 0$. On pourra utiliser la question 6)a.

On donne ci-contre le script de la fonction mystere, écrite en langage Python. On a importé la constante e .

- 7) Que renvoie mystere(100) dans le contexte de l'exercice ?

```
def mystere(n):
    I = 1 - 1/e
    L = [I]
    for i in range(n):
        I = (i + 1)*I - 1/e
        L.append(I)
    return L
```

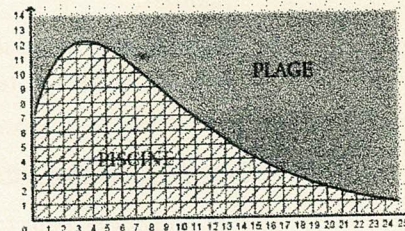


Pour s'entraîner

Pour t'entraîner davantage sur le calcul d'intégrales, voici quelques références d'exercices dans ton manuel : Exercices 44 à 51 page 255 & exercices 83, 85 et 88 page 258

Exercice 35 [Ra-Ch]

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un centre avec une piscine bordée de sable. Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et la piscine et la « plage » se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-contre. La bordure est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 25]$ par $f(x) = (5x + 7)e^{-0,2x}$.



- 1) Soit F la fonction définie sur $[0; 25]$ par $F(x) = (-25x - 160)e^{-0,2x}$. Démontrer que F est une primitive de f sur $[0; 25]$.
- 2) Quelle est l'aire en m^2 de la zone hachurée représentant la piscine ?
- 3) L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie. Quelle en sera la largeur arrondie au dixième de mètre ?

Exercice 36 [Ca]

Calculer chaque intégrale en intégrant par parties :

1. $\int_0^\pi x \cos(x) dx$

2. $\int_0^2 (3x + 1) e^{-x} dx$

3. $\int_1^e (2x + 1) \ln(x) dx$

4. $\int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^3} dx$

5. $\int_{-1}^1 2x(8x+2)^2 dx$

6. $\int_{-1}^3 3x^3 e^{x^2} dx$

Pour t'entraîner davantage sur la méthode d'intégration par parties, voici quelques références d'exercices dans ton manuel : Exercices 53 à 59 page 255

Exercice 37 [Ca]

Calculer les intégrales données à l'aide d'une double intégration par parties :

1. $\int_{-1}^2 \frac{3}{2} x^5 e^{x^2} dx$

2. $\int_0^1 -x^8 (2x^3 + 1)^4 dx$

3. $\int_0^3 \frac{x^2}{(x+1)^4} dx$

Exercice 38 [Ra-Ca-Co]

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.

- 1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.
- 2) La suite (I_n) est-elle convergente ?

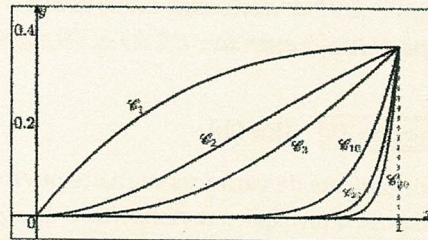
Exercice 39 [Ra-Ca-Co]

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$. Ainsi, par exemple, lorsque $n = 1$, on a : $I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

- 1) On considère les fonctions f et F définies sur $[0; 1]$ par $f(x) = x e^{-x}$ et $F(x) = (-x - 1) e^{-x}$.
 - a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0; 1]$.
 - b. En déduire la valeur de I_1 .

- 2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note C_n la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$.
On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous, quelques courbes représentatives de la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ pour différentes valeurs de n .

- Interpréter graphiquement I_n , pour tout entier naturel $n \geq 1$. Justifier.
- À partir du graphique, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (I_n) .



Pour les questions suivantes, on justifiera soigneusement les réponses en citant les propriétés utilisées.

- Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} (x-1) dx$.
 - En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .
 - En déduire que la suite (I_n) est convergente.
- Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout x de $[0; 1]$, $x^n e^{-x} \leq x^n$.
 - En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - En déduire la limite de la suite (I_n) .

Exercice 40 [Re-Ra-Ca-Co]

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 2$ et $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

- Montrer que pour tout réel x , $f(x) - g(x) = (x-1)(x+5)$.
- En déduire le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- On se place dans un repère orthonormé. Déterminer, en unité d'aire, l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations :
 - $x = -2$ et $x = 1$.
 - $x = 2$ et $x = 3$.

Exercice 41 [Re-Ra-Ca-Co]

f et g sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \frac{2}{e}\sqrt{x}$.

- h est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = g(x) - f(x)$.
 - Dresser le tableau de variations de la fonction h .
 - En déduire que pour tout réel $x > 0$, $f(x) \leq g(x)$.
- Démontrer que les fonctions $x \rightarrow x \ln(x) - x$ et $x \rightarrow \frac{4}{3e} x\sqrt{x}$ sont respectivement des primitives de f et g sur $\mathbb{R}^{++}$.
- C_f et C_g sont les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
D est le domaine délimité par C_f , C_g et les droites d'équations $x = 1$, $x = e^2$.
 - Justifier que l'aire, en u.a, de D est donnée par : $A(D) = \int_1^{e^2} (g(x) - f(x)) dx$.
 - Calculer $A(D)$.

Exercice 42 [Ca]

Dans chaque cas, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I donné.

- $f(x) = -x^2 + x - 3$; $I = [-2; 0]$.
- $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $I = [0; 1]$.

Exercice 43 [Re-Ra-Ca-Co] D'après BAC ES/L mai 2011

On considère les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} ; g(x) = -x + 1 \text{ et } h(x) = f(x) - g(x)$$

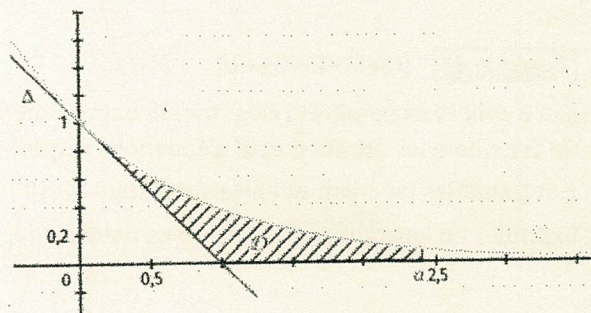
On note C_f la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthogonal.

Partie A : Position relative de C_f et de l'une de ses tangentes

- 1) Vérifier par le calcul, que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est la droite Δ .
- 2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - e^{-x}$. Puis, étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
- 3) En utilisant les questions 1. et 2. étudier la position relative de la courbe C_f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B : Calcul d'aire

1. Montrer que $\int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$.
2. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1. On appelle D le domaine hachuré sur le graphique ci-contre. On note A l'aire, exprimée en u.a., du domaine D .
 - a) Déterminer, en fonction de a , la valeur de A .
 - b) Déterminer la limite de A lorsque a tend vers $+\infty$.



Pour aller plus loin

Exercice 44 [Ch-Re-Ra-Ca-Co]

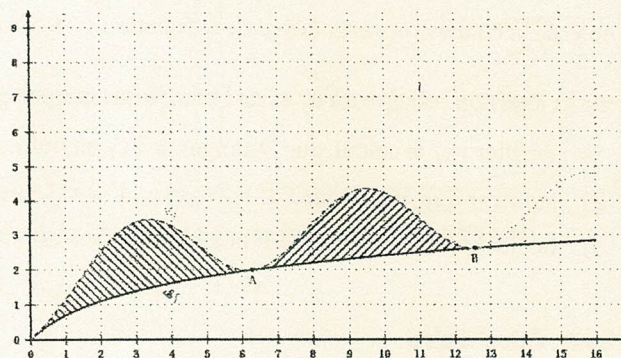
On considère les fonctions f et g définies sur $[0 ; 16]$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère orthonormé du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note

C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g .

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

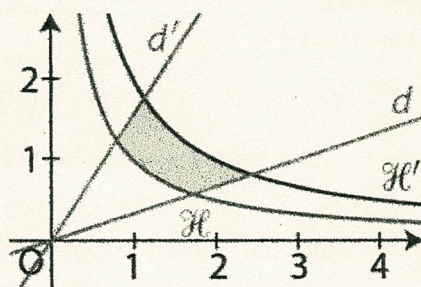
**Exercice 45** [Ch-Re-Ra-Ca-Co]

a et b sont deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

On considère les droites d et d' d'équations respectives $y = ax$ et $y = bx$ dans un repère orthonormé.

f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{2}{x}$ de courbes représentatives $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

Exprimer en fonction de a et b l'aire en unité d'aire, du domaine coloré en violet ci-dessous.

**Exercice 46** [Ch-Re-Ra-Ca-Co]

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, pour tout entier naturel non nul n , on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

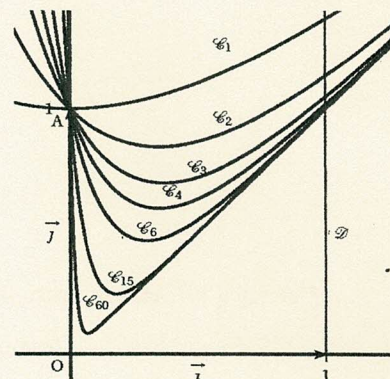
$$f_n(x) = x + e^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe C_n

pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.

L'objet de ce problème est l'étude de la convergence de la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$



- 1) Interpréter graphiquement I_n et conjecturer le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle.
- 2) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n) et justifier qu'elle converge.
- 3) Calculer la limite de la suite (I_n) .

Exercice 47 [Re-Ra-Ca-Co] Avec des suites adjacentes

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = x^3$. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et on note A l'aire, en unité d'aire, du domaine D situé sous la courbe $\mathcal{C}$.

Pour un nombre entier naturel $n \geq 2$, on découpe l'intervalle $[0; 1]$ à l'aide de nombres $a_k = \frac{k}{n}$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$.

Sur chaque intervalle $[a_k; a_{k+1}]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), on construit le rectangle R_k de hauteur $f(a_k)$ et le rectangle R'_k de hauteur $f(a_{k+1})$.

On note u_n la somme des aires des rectangles R_k et v_n la somme des aires des rectangles R'_k .

1) Pour tout entier naturel $n \geq 2$:

a. Justifier que $u_n \leq A \leq v_n$;

b. Vérifier que $u_n = \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3)$ et $v_n = \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \dots + n^3)$.

2) a. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

b. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n (avec $n \geq 2$).

3) Démontrer que :

a. La suite (u_n) est croissante ;

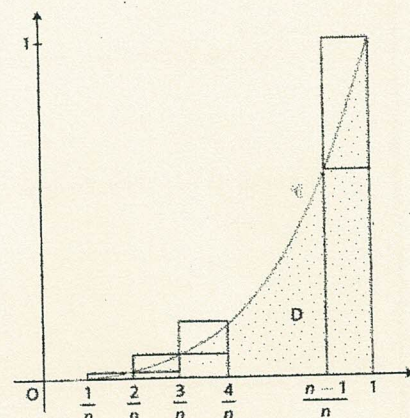
b. La suite (v_n) est décroissante ;

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

On dit dans cette situation, que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) a. Établir que les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont même limite.

b. Interpréter cette limite en terme d'aire.



Pour les exercices 47 et 48, f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f .

On découpe l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles ($n \geq 1$) de même longueur $\frac{b-a}{n}$ à l'aide des nombres réels $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n$.

Exercice 49 [Re-Ra-Ca-Co] La méthode des milieux

On note $x'_0, x'_1, \dots, x'_{n-1}$ les milieux respectifs des intervalles $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$.

Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), on construit le rectangle de dimensions $\frac{b-a}{n}$ et $f(x'_k)$.

La somme I_n des aires des rectangles est donnée par :

$$I_n = \frac{b-a}{n} [f(x'_0) + f(x'_1) + \dots + f(x'_{n-1})].$$

Cette somme est une approximation de l'aire, en u.a., du domaine sous la courbe $\mathcal{C}$, c'est-à-dire de $\int_a^b f(x) dx$.

Voici une fonction Milieux écrite en langage Python qui renvoie pour résultat la somme I_n des aires des rectangles.

```
from math import *
def f(x):
    y=exp(x)
    return y
def Milieux(a,b,n):
    p=(b-a)/n
    I=0
    for k in range(0,n):
        I+=f(a+(k+0.5)*p)
    I=p*I
    return I
```

- a) Expliquer le calcul de la variable I et en particulier l'instruction d'affectation de la ligne 11.
b) Saisir et tester cette fonction dans différentes situations.

Exercice 50 [Re-Ra-Ca-Co] La méthode des trapèzes

Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), on construit le trapèze T_k comme le montre la figure ci-contre.

1. a) Déterminer l'aire du trapèze T_k .

b) Démontrer que la somme des aires des trapèzes T_k est donnée par :

$$K_n = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right]$$

Cette somme est une approximation de l'aire, en u.a., du domaine sous la courbe $\mathcal{C}$, c'est-à-dire de $\int_a^b f(x) dx$.

2. La fonction Trapèzes écrite en langage Python renvoie pour résultat la somme K_n des aires des trapèzes.

```
from math import *
def f(x):
    y=exp(x)
    return y
def Trapèzes(a,b,n):
    p=(b-a)/n
    K=(f(a)+f(b))/2
    for k in range(1,n):
        K+=f(a+k*p)
    K=p*K
    return K
```

- a) Expliquer le calcul de la variable K .
b) Saisir et tester cette fonction dans différentes situations.